数理解析研究所講究録
54巻 1968年 66-71

M群について（稲垣氏の講演）

熊大 理　金沢　稔

時間の都合により、稲垣氏の講演が中止されたため自宅に伺ってお聞きしたことをこゝに紹介する。その節、裏話なども聞かせていただいたが、こゝではそれらを一切省略し、定理に用いる3つの補題及び定理を簡単に説明するにとどめる。尚、3補題はB. Huppertの近著[4]の第5章にあるので詳細については、それを参照されたい。

先づ、$\mathfrak{G}$を有限群, $\mathfrak{N}$を$\mathfrak{G}$の正規部分群, χ, φをそれぞれ$\mathfrak{G}$, $\mathfrak{N}$の既約指標とし

$$\mathfrak{G}_\varphi = \{G \in \mathfrak{G} ; \varphi^G = \varphi\}, \text{ 但し } \varphi^G(N) \overset{def.}{=} \varphi(N^G)$$

とおくと

$$\mathfrak{G}_\varphi \geq \mathfrak{N}, \quad [\mathfrak{G} : \mathfrak{G}_\varphi] = \text{相異なる } \mathfrak{G}\text{-conj. な } \varphi^G \text{ の数}$$

が成り立つことに注意する。

補題 1. Kを代数的閉体、$\mathfrak{G}$を有限群、$\mathfrak{N}$をその正規部分群、φをK上$\mathfrak{N}$の既約指標、とすれば次の二つが成立する。

(1) $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_\varphi \sigma_1 + \cdots + \mathfrak{G}_\varphi \sigma_n$ を $\mathfrak{G}_\varphi$ による $\mathfrak{G}$ の coset 分解とすると

$$(\varphi^{\mathfrak{G}})_{\mathfrak{N}} = [\,\mathfrak{G}_\varphi : \mathfrak{N}\,] \sum_{i=1}^{n} \varphi^{\sigma_i}$$

が成り立つ。

(2) $\varphi^{\mathfrak{G}}$ が $\mathfrak{G}$ の既約指標なることと、$\mathfrak{G}_\varphi$ が $\mathfrak{N}$ に一致することとは同値である。

(1)の成立は明らかである。又(2)も(1)を使えば

$$(\varphi^{\mathfrak{G}}, \varphi^{\mathfrak{G}})_{\mathfrak{G}} = [\,\mathfrak{G}_\varphi : \mathfrak{N}\,]$$

なることが容易に示されるからよい。

補題 2. K, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{N}$, φ を補題1と同じとする。このとき ψ_i を $\mathfrak{G}_\varphi$ の既約指標として

$$\varphi^{\mathfrak{G}_\varphi} = \sum_i \psi_i$$

が成立するとすれば、$\psi_i^{\mathfrak{G}}$ は $\mathfrak{G}$ の既約指標である。

証明は補題1の(1)を使うと

$$(\varphi^{\mathfrak{G}_\varphi})_{\mathfrak{N}} = [\,\mathfrak{G}_\varphi : \mathfrak{N}\,]\,\varphi$$

が成立するから $(\psi_i)_{\mathfrak{N}} = m_i \varphi$ とおける。今、χ を $\mathfrak{G}$ の既約指標で $(\chi, \psi_i^{\mathfrak{G}})_{\mathfrak{G}} \neq 0$ なるものとすれば

$$\chi(1) \leq \psi_i^{\mathfrak{G}}(1) = [\,\mathfrak{G} : \mathfrak{G}_\varphi\,]\,\psi_i(1) \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ。一方 Frobenius の相互律を使えば

$$(\chi_{\mathfrak{N}}, \varphi)_{\mathfrak{N}} \geq m_i$$

なることが言えるから、$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_\varphi \sigma_1 + \cdots + \mathfrak{G}_\varphi \sigma_n$ を $\mathfrak{G}_\varphi$ による

$\mathfrak{G}$ の coset 分解とすれば

$$(\chi_{\mathfrak{N}},\ \varphi^{g_j})_{\mathfrak{N}} \geq m_i$$

が成り立つ。従って

$$\chi(1) \geq m_i[\mathfrak{G}:\mathfrak{G}_\varphi]\varphi(1) = \psi_i^{\mathfrak{G}}(1) \qquad \cdots\cdots ②$$

がえられ、①, ② を合せて

$$\chi(1) = \psi_i^{\mathfrak{G}}(1)$$

をうる。これが求めるものであった。

次の補題は証明の概要も省略させていただく。

補題 3. K, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{N}$, φ は補題1と同じとする。 $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_\varphi$ であって、$\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ の射影表現は、$\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ のある通常表現に同値であるとする。このとき $\mathfrak{G}$ の既約指標 χ で、$\chi_{\mathfrak{N}}=\varphi$ なるものが存在する。

さて、$\mathfrak{G}$ のすべての既約表現が monomial なるとき $\mathfrak{G}$ を M-group というが、M-group の例として、超可解群及び A-group がある。1930年、竹田氏によって M-group が可解群なることが示され、その後も、伊藤昇氏, B. Huppert, L. Dornhoff, E. C. Dade 等により M-group についての研究がなされてきたが、未だ完全に解決されてはいない。研究の進展をはばむ理由の一つとして

M-group の部分群は必ずしも M-group ではない。

があげられよう。尚、M-group は巾零群と可解群の中間に位置を占めるものであるが、M-group の部分群について知られていることは、L. Dornhoff の

M-group の Hall 正規部分群は M-group である.

だけである。

ここでは、上に述べた3補題を使って次の定理の成立を示す。

定理. $\mathfrak{G}$ を M-group, p を素数とし $\mathfrak{N}$ を $\mathfrak{G}$ の index p の正規部分群とする。もし $\mathfrak{G}$ の一次以外の既約指標を induce する部分群 $\mathfrak{H}$ を $\mathfrak{N}$ が含めば、$\mathfrak{N}$ は M-group となる。

証明は、$\mathfrak{N}$ を M-group でないと仮定し、monomial でない $\mathfrak{N}$ の既約指標 φ に対し $[\mathfrak{G}:\mathfrak{G}_\varphi]=k$ とおくと $k=1$ or p となるから二つに場合を分けて、それぞれ矛盾を出す。

(i) $k=1$ i.e. $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_\varphi$ のとき

$\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ は cyclic となるから補題3により $\mathfrak{G}$ の既約指標 χ で $\chi_{\mathfrak{N}}=\varphi$ なるものが存在することになり、χ が monomial でないことに反する。

(ii) $k=p$ i.e. $\mathfrak{G}_\varphi=\mathfrak{N}$ のとき

補題1の(2)から $\varphi^{\mathfrak{G}}$ は $\mathfrak{G}$ の既約指標となり、従って仮定から $\mathfrak{H}$ の既約指標 ψ で $\psi^{\mathfrak{G}}=\varphi^{\mathfrak{G}}$ なるものがある。こ

7)

のとき $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_{\mathfrak{p}}\mathfrak{S}_1 + \cdots + \mathfrak{G}_{\mathfrak{p}}\mathfrak{S}_p$ を $\mathfrak{G}_{\mathfrak{p}}$ による $\mathfrak{G}$ の coset 分解とすると、補題1の(1)を使って

$$(\psi^{\mathfrak{G}})_{\mathfrak{G}_{\mathfrak{p}}} = (\varphi^{\mathfrak{S}_1})_{\mathfrak{G}_{\mathfrak{p}}} + \cdots + (\varphi^{\mathfrak{S}_p})_{\mathfrak{G}_{\mathfrak{p}}},$$

$$(\psi, (\psi^{\mathfrak{G}})_{\mathfrak{G}_{\mathfrak{p}}})_{\mathfrak{G}_{\mathfrak{p}}} = (\psi^{\mathfrak{G}}, \psi^{\mathfrak{G}})_{\mathfrak{G}} = 1$$

をうるから ψ は、ある $(\varphi^{\mathfrak{S}_i})_{\mathfrak{G}_{\mathfrak{p}}}$ に現われることが分かる。

従って

$$(\psi^{\pi}, \varphi^{\mathfrak{S}_i})_{\pi} > 0$$

から

$$\deg \varphi = \psi^{\pi}(1) \geq \varphi^{\mathfrak{S}_i}(1) = \deg \varphi^{\mathfrak{S}_i}$$

がえられて

$$\varphi \sim \varphi^{\mathfrak{S}_i} = \psi^{\pi} = \text{monomial}$$

となり矛盾が出る。

参考文献

[1] L. Dornhoff, M-groups and z-groups, M.Z. 100. (1967).

[2] B. Huppert, Monomial Darstellung endlicher Gruppen, Nagoya M.J. 6 (1953).

[3] ———, Gruppen mit modularer Sylow-Gruppen, M.Z. 75 (1961).

[4] ———, Endliche Gruppen I, Springer-Verlag

(1967).

[5] N. Itô, Note on A-groups, Nagoya M. Z. 4 (1952).

[6] K. Taketa, Über die Gruppen, deren Darstellungen sich sämtlich auf monomiale Gestalt transformieren lassen, Proc. Jap. Imp. Acad. 6 (1930).